

## 项目公示信息

一、项目名称：几类和式的均值及应用研究

二、主要完成人情况：

姓名	排名	行政职务	技术职称	工作单位	完成单位	主要贡献
张文鹏	1	无	教授	西北大学	西北大学	借助于巧妙加权, 得到 Dedekind 和高次均值的一系列较好的渐近公式; 通过巧妙加权, 得到 Ramanujan 和加权形式的一些精确恒等式, 受到国际同行的高度评价; 首次给出带原特征 Kloosterman 和四次均值的精确计算公式, 补充和完善了相关理论; 给出 Hardy 和、Cochrane 和的许多渐近公式。
张天平	2	无	副教授	陕西师范大学	陕西师范大学	讨论了一类 Hardy 和的均值分布, 通过合适加权, 给出了一些漂亮的恒等式; 给出了广义 Kloosterman 和四次均值的一个精确计算公式, 补充和完善了相关理论; 研究了 Lehmer 问题中误差项的加权均值、不完整区间上 Lehmer 问题的高维推广等; 给出了单个超级 Cochrane 和的一个较强的上界。
徐哲峰	3	研究生院副院长	教授	西北大学	西北大学	研究了 Dedekind 和的高次均值, 开创性地通过合理选取参数, 得到了其确切计算公式; 首次创造性地提出了整数及其 $m$ 次幂的分布问题, 并应用指数和理论解决了整数及其 $m$ 次幂的分布, 得到了一系列重要成果; 研究了不完整区间上特征和与高斯和的加权均值, 并得到了较强的渐近公式。
马元魁	4	无	副教授	西安工业大学	西安工业大学	首次给出了广义 Lehmer 数集上特征和的上界估计, 为探索特征和在一些特殊数集上是否存在相消性提供了重要依据。

三、完成人合作关系说明：

所有项目完成人目前或曾经在西北大学数学学院工作或学习，主要成员都在张文鹏教授课题组学习或工作，共同承担项目，共同发表论文，构成本项目的列表研究成果，具体情况如下：

(1) 各完成人在项目执行过程中，共同发表了项目中列出的系列论文，并先后承担了若干国家级及省级自然科学基金；

(2) 本项目第二完成人张天平副教授、第三完成人徐哲峰教授均在第一完成人张文鹏教授指导下获取博士学位。

#### 四、主要完成单位排序及贡献：

1.西北大学。作为本项目的依托单位，西北大学为项目的顺利完成并取得优异成绩做出了重要贡献，主要表现为：

- 1) 组织并完成了项目策划和实施工作；
- 2) 为项目的顺利实施提供了人力资源与优质的工作环境与场所；
- 3) 提供了本项目所需的设备、能源、图书资料和数据库等资源。

2.陕西师范大学。作为本项目的合作单位，陕西师范大学为项目的顺利完成并取得优异成绩做出了重要贡献，主要表现为：

- 1) 为项目的顺利实施提供了人力资源与优质的工作环境与场所；
- 2) 提供了本项目所需的设备、能源、图书资料和数据库等资源。

3. 西安工业大学。作为本项目的合作单位，西安工业大学为项目的顺利完成做出了如下贡献：

- 1) 为项目的顺利实施提供了人力资源与优质的工作环境与场所；
- 2) 提供了本项目所需的设备、能源、图书资料和数据库等资源。

#### 五、完成单位合作关系说明：

西北大学与陕西师范大学开展指数和、特征和等方面的合作研究。

陕西师范大学与西安工业大学开展特征和方面的合作研究，并提供了部分经费支持。

## 六、项目简介：

本成果属于数学学科基础研究。主要研究解析数论中一些重要和式的均值问题，包括：

1. 研究了 Dedekind 和，以及各种类 Dedekind 和的相关问题。包括 Dedekind 和、Hardy 和、Cochrane 和等问题。本成果深入研究了 Dedekind 和的高次均值，开创性地通过合理选取参数、以及巧妙加权等方式得到了高次均值的确切计算公式；本成果还研究了类 Dedekind 和的各种推广形式，得到了许多新的恒等式和加权均值公式，并给出了单个高维 Cochrane 和的一个较强的上界估计，这些工作毫无疑问是相当重要的。
2. 研究了一些重要指数和的均值问题。包括广义 Kloosterman 和的高次均值、Ramanujan 和的加权均值、广义 Kloosterman 和的加权均值等。本成果得到了广义 Kloosterman 和的四次均值的确切计算公式，补充和完善了相关理论；通过合适加权，得到了 Ramanujan 和加权形式的一些精确恒等式，被国际数论专家 Djordje Milićević 评价为“证明依赖于一些已有结果，以及对于包含可乘函数和式的娴熟理”。证明中所涉及和式的精确计算公式更是被高度评价为“这一计算很有单独研究的价值”。本成果还研究了广义 Kloosterman 和的几类加权均

值，给出了一些较强的渐近公式。

3. 研究了特征和问题。包括广义 Lehmer 数集上特征和的上界估计、不完整区间上特征和与广义二次 Gauss 和、广义 Kloosterman 和的加权均值等。本成果给出了广义 Lehmer 数集上特征和的上界估计，为探索一些特殊数集上特征和是否存在相消性提供了重要依据；本成果还通过对一些特殊不完整区间上原特征和加权均值进行深入细致的研究，获得了一系列渐近公式，从而给该类问题重新注入了研究活力。

4. 应用指数和及特征和理论研究了整数及其  $m$  次幂的分布、D.H. Lehmer 问题等。包括不完整区间上整数及其  $m$  次幂的分布、Lehmer 问题中误差项的加权均值、不完整区间上 Lehmer 问题的高维推广等。本成果首次创造性地提出了整数及其  $m$  次幂的分布问题，比著名的整数及其逆的分布问题更为一般和深刻，并利用指数和工具得到了一系列重要成果，为这一方面的研究工作开辟了一条崭新的道路。此外，本成果还研究了一些特殊不完整区间上 Lehmer 问题的高维推广，分别利用指数和及特征和估计获得了一些较强的渐近公式。

本成果的研究内容在解析数论、加法数论研究中占有举足轻重的位置，并和“Linnik 猜想”、“华林问题”等数论难题密切相关。我们所研究的和式大多源于这些数论难题的研究过程。本成果从不同的角度对这些和式进行了深入细致的研究，获得了一系列重要结论。我们坚信对这些和式本质性质的进一步了解和掌握，必将加快这些数论难题的研究进展，甚至对促进数论学科的发展有着重要的理论意义。

本成果的 20 篇代表作中有 19 篇被 SCI 收录(其中包括在数论方

向顶级期刊《Journal of Number Theory》发表论文 6 篇），1 篇被 CSCD 收录(发表于《中国科学：数学》)。论文发表后受到国内外学术界的高度关注与同行的多次引用，其中包括被《Proceedings of the American Society》、《Journal of Number Theory》等数学类重要学术期刊多次引用。

七、主要论文专著目录和主要知识产权证明目录：见下页

序号	论文专著名称	刊名	作者	影响因子	年卷页码 (xx年xx卷 xx页)	发表时间	通讯作者	第一作者	国内作者	SCI他 引次数	他 总次 数	知识产 权 是否归 国内所有
1	On the fourth power mean of the general Kloosterman sums	Journal of Number Theory	张文鹏	0.74	2016, 169: 315-326	2016-12-01	张文鹏	张文鹏	张文鹏	0	0	是
2	Some identities involving certain Hardy sum and Kloosterman sum	Journal of Number Theory	彭文, 张天平	0.74	2016, 165: 355-362	2016-08-01	张天平	彭文	彭文, 张天平	1	1	是
3	On the fourth power mean of the analogous general Kloosterman sum	Journal of Number Theory	陈慧, 张天平	0.74	2016, 160: 326-333	2016-05-01	张天平	陈慧	陈慧, 张天平	0	0	是
4	A hybrid mean value of Dedekind sums and Kloosterman sums	Journal of Number Theory	张文鹏, 韩迪	0.59	2015, 147: 861-870	2015-02-01	张文鹏	张文鹏	张文鹏, 韩迪	1	1	是
5	Distribution of the difference of an integer and its m-th power mod n over incomplete intervals	Journal of Number Theory	徐哲峰	0.52	2013, 133: 4200-4223	2013-12-01	徐哲峰	徐哲峰	徐哲峰	0	0	是

6	On character sums over a short interval	Journal of Number Theory	张天平, 徐哲峰, 李战虎	0.50	2009, 129: 948-963	2009-04-01	张天平	张天平	张天平, 徐哲峰, 李战虎	0	0	是
7	An interesting identity and asymptotic formula related to the Dedekind sums	Science China. Mathematics	徐哲峰, 张文鹏	0.65	2014, 57: 659-663	2014-03-01	徐哲峰	徐哲峰	徐哲峰, 张文鹏	0	0	是
8	On the difference between an integer and its $m$ -th power mod $n$	Science China. Mathematics	徐哲峰	0.71	2013, 56:1597-1606	2013-08-01	徐哲峰	徐哲峰	徐哲峰	0	0	是
9	A hybrid mean value involving Cochrane sums and a new sum analogous to Kloosterman sums	Lithuanian Mathematical Journal	张文鹏	0.50	2016, 56: 127-132	2016-01-01	张文鹏	张文鹏	张文鹏	0	0	是
10	Character sums over generalized Lehmer numbers	Journal of Inequalities and Applications	马元魁, 陈慧, 秦珍珍, 张天平	0.79	2016, 2016:270, 9pp	2016-11-01	张天平	马元魁	马元魁, 陈慧, 秦珍珍, 张天平	0	0	是

11	High-dimensional D. H. Lehmer problem over short intervals	Acta Mathematica Sinica, English Series	徐哲峰, 张天平	0.47	2014, 30:213-228	2014-02-01	徐哲峰	徐哲峰	徐哲峰, 张天平	0	0	是
12	On the general quadratic Gauss sums weighted by character sums over a short interval	Bulletin of the Korean Mathematical Society	张天平	0.44	2013, 50:873-883	2013-05-01	张天平	张天平	张天平	0	0	是
13	A note on the hyper Cochrane sum	Indian Journal of Pure and Applied Mathematics	张天平	0.20	2013, 44:297-310	2013-06-01	张天平	张天平	张天平	0	0	是
14	A mean value related to D. H. Lehmer's problem and the Ramanujan's sum	Glasgow Mathematical Journal	张文鹏	0.43	2012, 54:155-162	2012-01-01	张文鹏	张文鹏	张文鹏	3	3	是
15	On the mean values of $L(1, \chi)$	Bulletin of the Korean Mathematical Society	巫朝霞, 张文鹏	0.38	2012, 49:1303-1310	2012-11-01	巫朝霞	巫朝霞	巫朝霞, 张文鹏	3	3	是
16	On mixed two-term exponential sums	Journal of the Korean Mathematical Society	张天平	0.46	2010, 47:1107-1122	2010-11-01	张天平	张天平	张天平	0	0	是



17	On the r-th hyper Kloosterman sums and a problem of D.H.Lehmer	Journal of the Korean Mathematical Society	张天平, 薛西锋	0.37	2009, 46:733-746	2009-07-01	张天平	张天平	张天平, 薛西锋	1	1	是
18	On the r-th hyper Kloosterman sums and its hybrid mean value	Journal of the Korean Mathematical Society	张天平, 张文鹏	0.32	2006, 43:1199-1217	2006-11-01	张天平	张天平	张天平, 张文鹏	0	0	是
19	A generalization on the difference between an integer and its inverse Modulo q (II)	Proceedings of the Japan Academy Series A-Mathematical Sciences	张天平, 张文鹏	0.17	2005, 81:7-11	2005-01-01	张天平	张天平	张天平, 张文鹏	6	6	是
20	不完整区间上整数及其逆的差	中国科学: 数学	徐哲峰, 易媛	0	2011, 41:669-679	2011-08-01	徐哲峰	徐哲峰	徐哲峰, 易媛	0	0	是

## 八、客观评价：

该成果主要是对 Dedekind 和的高次均值、一些特殊指数和的高次均值、Ramanujan 和的加权均值、特征和在 Lehmer 数集上的上界估计、不完整区间上特征和的加权均值等进行重点研究，做出了实质性的进展。作为指数和与特征和的理论应用，研究了著名的整数及其逆的分布、D.H. Lehmer 问题等，尤其是首次创造性地提出并解决了整数及其  $m$  次幂的分布问题，取得了一系列重要成果。

该成果先后在《Journal of Number Theory》、《Science China. Mathematics》、《Glasgow Mathematical Journal》和《中国科学：数学》等数学著名期刊发表高水平论文 29 篇，其中 SCI 收录 22 篇（包括在数论方向顶级期刊《Journal of Number Theory》发表论文 6 篇）。论文发表后受到国内外学术界的关注与同行的引用。该成果论文先后被《Proceedings of the American Mathematical Society》、《Journal of Number Theory》、《Mathematische Zeitschrift》、《Japanese Journal of Mathematics》、《Turkish Journal of Mathematics》等数学类重要学术期刊多次引用。其国际数论专家 Djordje Milićević 在对“A mean value related to D. H. Lehmer's problem and the Ramanujan's sum”一文的评论中提到：“证明依赖于一些已有结果，以及对于包含可乘函数和式的娴熟处理...”。证明中所涉及和式的精确计算公式更是被 Djordje Milićević 高度评价为“这一计算很有单独研究的价值”。

## 九、科学意义和价值：

关于 Dedekind 和、Kloosterman 和、Ramanujan 和等各种性

质的研究十分活跃，如 Berndt、贾朝华、 Kloosterman、 Iwaniec、 Fouvry、 Shparlinski、华罗庚、叶杨波等人在这些和式的单个上界估计、均值估计等方面得到了不少好结果。但关于高次均值的结果并不令人满意。本成果研究了 Dedekind 和的高次均值，开创性地通过合理选取参数，得到了其确切计算公式；借助于巧妙加权，得到了 Dedekind 和高次均值的一系列较好的渐近公式；讨论了一类 Hardy 和的均值分布，通过合适加权，给出了一些漂亮的恒等式；本成果还在广义 Kloosterman 和的高次均值方面也取得了不少有理论价值的研究成果，得到了一些精确计算公式，补充和完善了相关理论；通过巧妙加权，得到了 Ramanujan 和加权形式的一些精确恒等式，受到了国际同行的高度评价。此外，本成果关于 Hardy 和的加权均值以及高维 Cochrane 和的单个上界估计方面也取得了不少新进展，研究成果处于领先地位。

对于特征和上界以及各种形式均值的研究，国内外学者获得了十分丰富的成果。但是很少有人注意到特征和在一些特殊数集上是否存在相消性。本成果首次给出了特征和在广义 Lehmer 数集上的上界估计，为相关理论探索提供了重要依据。本成果还通过对一些特殊不完整区间上原特征和加权均值进行深入细致的研究，获得了一系列较强的渐近公式。从而将有关领域的内容进行了深刻而又广泛的推广，为相关问题重新注入了研究活力。

指数和与特征和的理论应用方面，本成果首次创造性地提出了整数及其  $m$  次幂的分布问题，比著名的整数及其逆的分布问题更为一

般和深刻，并利用指数和工具得到了一系列重要成果，为这一方面的研究工作开辟了一条崭新的道路。此外，本成果还应用指数和及特征和理论研究了 D.H. Lehmer 问题中误差项的加权均值、完整区间上 Lehmer 问题的高维推广等，获得了一些深刻的结果。

由此可见，本成果的科学意义和价值主要体现在以下三个方面：

第一，注重挖掘这些重要和式之间的转化关系，运用“转换”、“凑项”、“整合”、“选参”、“加权”等技巧获得了一些非平凡的结论；

第二，灵活使用“指数和转换”与“特征和转换”等解析技巧，并在转换过程中随时把握住在指数和与特征和估计中均值估计优于单个估计的原则，始终以均值的形式处理各种指数和以及特征和、误差项或余项；

第三，将所讨论问题限定在一些特殊的区间上，通过研究该问题在这种特殊区间上的本质性质来探究其一般形式的性质。这种从特殊到一般，从简单到复杂的研究思路，为一般区间上其它问题的研究提供了方法基础。

十、知情同意证明：

# 申报2018年度陕西省科学技术奖励

## 知情同意证明

陕西省科技厅：

西北大学张文鹏老师主持申报的项目《几类和式的均值及应用研究》，拟申报 2018 年度陕西省科学技术奖，报奖成果 20 篇论文（专著）中，其中有 3 篇本人为第一作者或通讯作者，本人同意不作为本次申报奖励的主要完成人，没有异议。

特此证明。

附：（本人为第一作者或通讯作者的论文）

2	彭文 张天平*	2016	Some identities involving certain Hardy sum and Kloosterman sum	Journal of Number Theory	165 (SCI)	355-362
3	陈慧 张天平*	2016	On the fourth power mean of the analogous general Kloosterman sum	Journal of Number Theory	160 (SCI)	326-333
15	巫朝霞 张文鹏	2012	On the mean values of $L(1, \chi)$	Bulletin of the Korean Mathematical Society	49(6) (SCI)	1303-1310

签名：彭文 陈慧 巫朝霞

2018 年 3 月 19 日